Überreicht vom Verfasser

ZUR ZERLEGUNG DER EUKLIDISCHEN RÄUME IN KONGRUENTE POLYTOPE

VON

Dr. KARL REINHARDT

PROFESSOR IN GREIFSWALD

SONDERABDRUCK AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN
DER PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
PHYS.-MATH. KLASSE. 1928. XIV

BERLIN 1928
VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

(PREIS *RM* 1.—)

ZUR ZERLEGUNG DER EUKLIDISCHEN RÄUME IN KONGRUENTE POLYTOPE

VON

Dr. KARL REINHARDT

PROFESSOR IN GREIFSWALD

SONDERABDRUCK AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN
DER PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
PHYS.-MATH. KLASSE. 1928. XIV

BERLIN 1928
VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

(PREIS $\mathcal{RM}$ 1.—)

(Vorgelegt von Hrn. BIEBERBACH.)

Hilbert hat in seinem bekannten Vortrag über »Mathematische Probleme« (Gött. Nachr. 1900) auch die Frage aufgeworfen, ob nur Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen die Eigenschaft besitzen, eine Zerlegung des euklidischen n-dimensionalen Raumes R_n in kongruente Bereiche zu liefern. Für $n = 2$, also für die euklidische Ebene, ist dies tatsächlich der Fall; mit diesem Problem beschäftigt sich eine kürzlich in diesen Sitzungsberichten erschienene Arbeit von mir und eine später erscheinende Fortsetzung derselben. Dagegen ist die Frage für $n > 2$ zu verneinen, wie ich hier an Beispielen zeigen will.

Ich behandele zunächst den Fall $n = 3$. Hier liegt der innere Grund für die Existenz von Zerlegungsbereichen (d. s. Bereiche mit der Eigenschaft, daß sich der R_3 in zu ihnen kongruente Exemplare zerlegen läßt), die nicht Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen des R_3 sind, ja sogar von Zerlegungspolyedern von dieser Beschaffenheit, darin, daß es mehrfach zusammenhängende Zerlegungspolyeder gibt, die keine Fundamentalpolyeder sind. Ein solches kann leicht aus dem in Abb. 1 dargestellten Polyeder P gewonnen werden. P entsteht aus einer rechteckigen Platte von der Dicke a, der Breite $3 \cdot a$ und der Länge $4 \cdot b$ durch Anbringen eines Loches und eines Einschnitts. Loch und Einschnitt haben die Form quadratischer Säulen von der Höhe b und mit der Grundkante a, und sind so beschaffen, daß sie die Breite der Platte in drei und ihre Länge in vier gleiche Teile teilen.

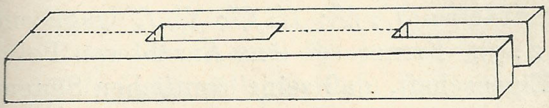

Abb. 1.

Ich will zuerst einen Überblick über die Arten gewinnen, auf welche sich der Raum in Exemplare P zerlegen läßt. Ich kann zunächst aus je zwei Exemplaren P drei verschiedene einfach zusammenhängende Zerlegungspolyeder P_1, P_2, P_3 gewinnen. Zu diesem Zweck bezeichne ich die Achse von P (das sei die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der »linken« und

»rechten« Seitenfläche der Platte, aus der P entstand) mit $\bar{a}$, und die Ebene, die auf $\bar{a}$ in dem Punkte senkrecht steht, der von der »linken« Seitenfläche um $\frac{3}{2}\cdot b$ »nach rechts zu« entfernt ist, mit E. Die positive Richtung von $\bar{a}$ sei die »nach rechts«. Übe ich dann auf P eine Schraubung $\left(+b, \pm\frac{\pi}{2}\right)$ mit $\bar{a}$ als Achse, mit der Verschiebung $+b$ und mit der Drehung durch den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ aus, so fügt sich offenbar das gedrehte mit dem ursprünglichen Polyeder gerade zu einem Gesamtpolyeder P_1 zusammen. Ebenso hätte ich P_1 erhalten, wenn ich die Schraubung $\left(-b, \pm\frac{\pi}{2}\right)$ ausgeführt hätte. Übe ich dagegen nach der Schraubung $\left(+b, \pm\frac{\pi}{2}\right)$ noch eine Spiegelung an E aus, so erhalte ich auf entsprechende Weise ein anderes Gesamtpolyeder P_2. Führe ich schließlich dieselbe Spiegelung nach der Schraubung $\left(-b, \pm\frac{\pi}{2}\right)$ aus, so entsteht ein drittes Polyeder P_3. In Exemplare P_1 oder P_2 oder P_3 kann man aber den Raum ersichtlich dadurch zerlegen, daß man sie zunächst zu unendlich langen Balken von kreuzförmigem Querschnitt (s. Abb. 2) aneinanderreiht, und diese Balken dann in der in Abb. 2 angegebenen Weise — und etwa gegeneinander »unverschoben« — zusammenfügt.

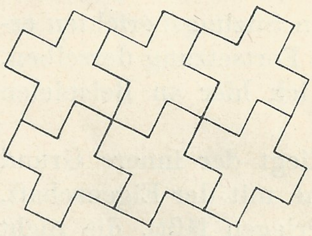

Abb. 2.

Ich will nun, um unnötige Weitschweifigkeiten hier zu vermeiden, etwa $b = \frac{3}{2}\cdot a$ annehmen, und dann beweisen, daß Zerlegungen des R_3 in Exemplare P nur über Polyeder P_1 oder P_2 oder P_3 möglich sind. Zu diesem Zweck stelle ich zunächst folgende Hilfsbetrachtung an.

Es sei ein Quader mit den Seitenflächen f_1', f_1''; f_2', f_2''; f_3', f_3'' gegeben; f_i' möge f_i'' gegenüberliegen ($i = 1, 2, 3$). Ferner sei eine Anzahl von Polyedern p_i vorgelegt; jedes p_i habe die Eigenschaft, daß seine sämtlichen Seitenflächen nur drei zueinander senkrechte Stellungen besitzen. Mit diesen p_i sei der Quader lückenlos ausgefüllt, und zwar so, daß f_1', f_1''; f_2', f_2'' Begrenzungen der Füllung darstellen, diese aber über f_3' und f_3'' möglicherweise hinausragen kann. Ich behaupte, daß dann sämtliche p_i sich in der Füllung in Normalstellung befinden, d. h. so, daß für jedes p_i die drei Ebenenstellungen mit den Stellungen der Seitenflächen des Quaders übereinstimmen. Dies ist klar; denn nenne ich für den Augenblick eine Kante eine konkave Kante, wenn sie den Flächenwinkel $\frac{\pi}{2}$ in einen zu füllenden Raumteil hineinschickt (wie z. B. die auf f_3' senkrechten Quaderkanten), so muß ein Polyeder p_i, von dem eine Kante (teilweise) mit einer konkaven Kante zusammenfällt, offenbar stets Normalstellung haben, wenn die beiden Ebenen, die die konkave Kante bestimmen, Normalstellung besitzen. Nun kann ich mir die Füllung des Quaders schrittweise vorgenommen denken, indem ich ein p_i nach dem anderen an eine konkave Kante anlagere. Ich kann von einer auf f_3' senkrecht stehenden konkaven Quaderkante ausgehen. Wenn die an diese grenzenden p_i in Normalstellung den Quader noch nicht füllen, müssen ersichtlich neue konkave Kanten entstehen, deren Bestimmungsebenen wieder Normalstellung haben müssen, und mit denen ich dann fortfahren kann. Dies Verfahren läßt sich fortsetzen, bis die Füllung erschöpft ist. Damit ist dann die Behauptung bewiesen[1].

Aus dieser Hilfsbetrachtung folgt nun, daß das Loch in P (das hier den zu füllenden Quader darstellt) nur durch andere Polyeder P in Normalstellung gefüllt werden kann. Man braucht also nur die zwölf möglichen Normalstellungen von P daraufhin zu prüfen, ob sie das Loch oder einen Teil desselben zu füllen vermögen. Die vier Stellungen, bei denen die Kanten von der Länge a senkrecht stehen (wie in Abb. 1), sind hierzu nicht imstande. Die vier Stellungen, bei denen die Kanten von der Länge a diejenige Richtung besitzen, welche ursprünglich die Kanten von der Länge $3 \cdot a$ hatten, liefern Füllungen, und zwar zwei davon je zwei, die beiden anderen wegen $b = \frac{3}{2} \cdot a$ keine. Diese Füllungen sind genau die zu den Polyedern P_1, P_2, P_3 führenden. Bei ihnen wird jedesmal das Loch gänzlich durch ein Polyeder gefüllt. Von den vier letzten Stellungen, bei denen die Kanten von der Länge a die ursprüngliche Richtung der Kanten von der Länge $4 \cdot b$ besitzen, liefern zwei ersichtlich Füllungen von Teilen des Loches; da aber wegen $b = \frac{3}{2} \cdot a$ diese Stellungen allein niemals zur ganzen Füllung führen können, und andere Stellungen nicht in Frage kommen, so ist damit die Behauptung bewiesen, daß eine Zerlegung des R_3 in Exemplare P nur über Polyeder P_1, P_2, P_3 möglich ist.

Ich will es hier dahingestellt sein lassen, ob möglicherweise bei einer Raumzerlegung die Polyeder P_1, P_2, P_3 gemischt vorkommen können, da ich die Polyeder P_2 und P_3 sowieso gleich ausschalten werde. Jedenfalls kann nämlich festgestellt werden, daß die oben geschilderte Zerlegung des R_3 in Polyeder P, sofern sie nur über Polyeder P_2 oder nur über Polyeder P_3 erfolgt, und die Balken etwa »unverschoben« aneinandergelagert werden, eine

[1] Das Wesentliche bei diesem Gedankengang ist das stets erneute Auftreten konkaver Kanten. Treten nur konvexe Kanten auf (d. h. solche, die den Flächenwinkel $\frac{3\pi}{2}$ in den noch zu füllenden Raumteil schicken), so werden die Verhältnisse wesentlich anders, da konvexe Kanten in Seitenflächen weiterer Polyeder liegen können. Hierauf beruht die Schwierigkeit der Behandlung der allgemeineren hierher gehörigen Probleme, etwa der Zerlegung des ganzen Raumes in Polyeder p_i, wo der fragliche Satz über die Normalstellung falsch wird (während er in der Ebene stets gilt). Ein Beispiel dafür bietet etwa die regelmäßige Zerlegung des Raumes in kongruente Würfel, wenn man sich dieselbe durch eine Netzebene in zwei Teile (Halbräume) zerspalten und den einen Teil durch eine beliebige Bewegung, welche die Netzebene in sich überführt, gegen den anderen verdreht denkt.

gruppenmäßige ist, d. h. eine solche, bei der P als Fundamentalpolyeder erscheint. Ich ändere daher P so ab, daß eine Zusammenfügung von zwei Exemplaren P zu P_2 oder P_3 unmöglich wird, und nur eine Zusammenfügung zu P_{I} möglich bleibt. Dies kann auf mannigfache Weise geschehen, etwa durch Anbringen von zwei kongruenten Federn von quadratischem Querschnitt an den linken Seitenflächen des Loches und des Einschnitts von P, und von je einer dazu kongruenten und um $\frac{\pi}{2}$ verdrehten Nut an der rechten Seitenfläche des Loches und an der linken Seitenfläche von P, so wie es z. B. Abb. 3 angibt, wo nur das Loch (bei fehlender vorderer Begrenzung) herausgezeichnet ist. Bei der Herstellung der Polyeder P_{I} verspunden sich je eine Feder und die zugehörige Nut, während Polyeder P_2 und P_3 jetzt nicht mehr möglich sind, und im übrigen die sämtlichen seitherigen Betrachtungen bestehen bleiben, so daß also jetzt nur mehr eine einzige Zerlegung des Raumes (abgesehen von einer Verschiebung der Balken gegeneinander) in Exemplare des neu entstandenen Polyeders $\overline{P}$ möglich ist.

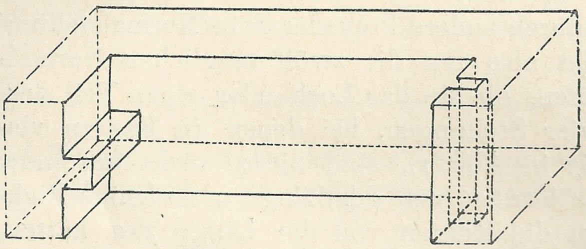

Abb. 3.

$\overline{P}$ ist nun ein Zerlegungspolyeder vom Ringzusammenhang, das nicht Fundamentalpolyeder ist. Denn übt man auf ein geeignet gewähltes Exemplar in der einzigen soeben nachgewiesenen Zerlegungsart die Schraubung $\left(+b, \pm\frac{\pi}{2}\right)$ aus, die es in ein anderes Exemplar der Zerlegung überführt, so wird dieses zweite Exemplar durch dieselbe Schraubung sicher nicht in ein Exemplar der Zerlegung übergehen. Man kann aus $\overline{P}$ nun aber auch leicht ein einfach zusammenhängendes Zerlegungspolyeder mit der gleichen Eigenschaft gewinnen. Zu diesem Zweck ist nur nötig, $\overline{P}$ durch einen ebenen Schnitt, dessen Ebene durch die Achse $\bar{a}$ von $\overline{P}$ geht und auf der Grundfläche der rechteckigen Platte, aus der P entstand, senkrecht steht, in zwei kongruente einfach zusammenhängende Polyeder $\overline{\overline{P}}_{\mathrm{I}}$ zu zerteilen. Dieser Schnitt ist in Abb. 1 angedeutet. $\overline{\overline{P}}_{\mathrm{I}}$ ist nun allerdings wieder Fundamentalpolyeder, denn übt man auf ein Exemplar die Schraubung $(+2b, \pm\pi)$ aus, und fügt man das so entstehende Exemplar mit dem ursprünglichen zusammen, so läßt sich der Raum ersichtlich in Exemplare des so entstandenen Gesamtpolyeders wieder gruppenmäßig zerlegen. Es bleibe auch wieder dahingestellt, ob man nicht etwa noch auf ganz andere Weise den Raum nunmehr in Polyeder $\overline{\overline{P}}_{\mathrm{I}}$ zerlegen kann. Man kann jedenfalls die sich auf $\overline{P}$ gründende Ausgangszerlegung, durch welche $\overline{\overline{P}}_{\mathrm{I}}$ eben definiert wurde, als einzig mögliche wieder dadurch erzwingen, daß man zwei Exemplare $\overline{\overline{P}}_{\mathrm{I}}$, die zusammen $\overline{P}$ ergeben, etwa erneut verspundet. Dies kann beispielsweise (um jede weitere Möglichkeit a priori auszuschließen) dadurch geschehen, daß man sich die »linke« der beiden in Abb. 1 gezeichneten Schnittflächen von $\overline{P}$ durch die Achse $\overline{a}$ in zwei kongruente Rechtecke[1] geteilt denkt, und daß man am »hinteren« Exemplar $\overline{\overline{P}}_1$ mit dem Mittelpunkt des »oberen« Rechtecks als Zentrum der Grundfläche einen (genügend kleinen) Zapfen von der Form eines geraden (etwa regelmäßig dreiseitigen) Prismas »nach vorne« anbringt[2], während der kongruente Zapfen vom Mittelpunkt des unteren Rechtecks aus am »vorderen« Exemplar $\overline{\overline{P}}_1$ »nach hinten« angeheftet werden muß. Umgekehrt sind dann an beiden Exemplaren die zu den Zapfen gehörigen Nuten auszusparen. Dann sind die beiden Exemplare immer noch kongruent (vermöge einer Drehung um $\overline{a}$ durch den Winkel π), ein Exemplar $\overline{\overline{P}}$ ist ein einfach zusammenhängendes Zerlegungspolyeder, es ist nur eine einzige Zerlegung (im früheren Sinne) möglich, und in dieser Zerlegung erscheint $\overline{\overline{P}}$ nicht als Fundamentalpolyeder. Es gibt im R_3 also Zerlegungsbereiche, die nicht Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen sind.

Ich will nun noch kurz zeigen, daß es überhaupt in jedem R_n $(n \geqq 3)$ Zerlegungspolytope gibt, die nicht Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen sind. Ich beweise nämlich, daß diese Behauptung für den R_n richtig ist, wenn sie für den R_{n-1} gilt, und für den R_3 habe ich sie eben bewiesen.

Zu diesem Zweck stelle ich folgende Betrachtungen an: Es sei eine Zerlegung der Ebene in kongruente Bereiche vorgelegt. Dann kann ich daraus eine Zerlegung des Raumes in kongruente Bereiche gewinnen, indem ich über jedem Bereich der ebenen Zerlegung als Grundfläche die (etwa gerade) beiderseits unendlich lange Säule errichte, und die Folge dieser Säulen durch äquidistante und zu der Ausgangsebene parallele Ebenen schneide. Ich kann die so gewonnene Raumzerlegung noch dadurch abändern, daß ich die einzelnen Säulen beliebig gegeneinander (in ihrer Richtung) verschiebe. Im allgemeinen wird es wohl außer den eben genannten noch andere Zerlegungen des Raumes in Exemplare des so gebildeten räumlichen Bereichs geben. Auch hier kann ich jedoch die geschilderten Zerlegungen allein wieder durch geeignete Verspundung der Säulenbausteine erzwingen. Ich nehme an, daß der räumliche Bereich »sehr lang« sei, und bringe auf seiner Deckfläche in der Säulenrichtung einen »genügend langen« und »sehr dünnen« Zapfen von beliebigem Querschnitt an, und auf seiner Grundfläche eine dazugehörige (durch Parallelverschiebung in der Säulenrichtung um die »Höhe« des räumlichen Bereichs) kongruente Nut. Es ist klar, daß durch geeignete Wahl der Länge, der Dicke und des Querschnitts des Zapfens und der Nut stets erreicht werden kann, daß die Säulen bei der Zerlegung zwangsläufig entstehen, und daß dann die oben geschilderten Zerlegungen die einzig möglichen sind. Nun sind, wenn die Zerlegung der Ausgangsebene keine gruppenmäßige war,

---

[1] Wenn hier von »Rechtecken« gesprochen wird, wird im Augenblick nicht an $\overline{P}$, sondern an P gedacht.

[2] Man kann natürlich auch mit geeignet gewählten Quadern in entsprechender Weise verzapfen und zum Nachweis der Einzigkeit der Zerlegung dann direkt wieder den Hilfssatz von S. 151 anwenden.

auch diese Raumzerlegungen keine gruppenmäßigen. Denn dann existiert eine durch die ebene Zerlegung definierte Bewegung der Ebene in sich, die ein Exemplar des ebenen Zerlegungsbereichs sicher nicht in ein anderes solches Exemplar überführt, und damit existiert dann auch eine räumliche Bewegung (eine Bewegung, die durch die Raumzerlegung definiert ist, und aus der ebenen Bewegung durch Komposition mit einer Parallelverschiebung in Richtung der Säulen hervorgeht), die eine ganze Säule der Raumzerlegung sicher nicht mit einer anderen solchen Säule, und damit jeden ihrer Bausteine sicher mit keinem anderen Zerlegungsbereich zur Deckung bringt.

Die gleichen Überlegungen gelten offenbar, wenn man statt von der Ebene von einem R_{n-1} ausgeht, und auf entsprechende Weise aus einem Zerlegungsbereich des R_{n-1} einen solchen des R_n gewinnt, und man kann noch hinzufügen, daß der Zerlegungsbereich des R_n ein Polytop sein wird, wenn es derjenige des R_{n-1} war[1], und daß das erstere Polytop einfach zusammenhängend sein wird, wenn das letztere einfach zusammenhängend war. Ist demnach das Zerlegungspolytop des R_{n-1} so beschaffen, daß keine mit ihm mögliche Zerlegung gruppenmäßig ist, so ist auch keine der möglichen Zerlegungen des R_n in Exemplare des abgeleiteten Polytops gruppenmäßig. Ist also das ursprüngliche Polytop kein Fundamentalpolytop, so ist auch das abgeleitete kein solches. Aus dem vorhin für den R_3 konstruierten Polyeder $\overline{\overline{P}}$ kann man also für jeden R_n $(n > 3)$ ein einfach zusammenhängendes Zerlegungspolytop ableiten, das kein Fundamentalpolytop ist. Es gibt mithin in jedem R_n $(n \geq 3)$ Zerlegungsbereiche, die nicht Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen sind.

[1] Und wenn als Zapfenform ebenfalls ein Polytop gewählt wird.

Ausgegeben am 18. Juni.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Sonderabdrucke aus den Sitzungsberichten 1926—1928

Verlag der Akademie der Wissenschaften.
In Kommission bei Walter de Gruyter u. Co.

Physikalisch-mathematische Klasse.

Einstein: Über die Interferenzeigenschaften des durch Kanalstrahlen emittierten Lichtes E. Rupp: Über die Interferenzeigenschaften des Kanalstrahllichtes	*RM* 2.—
Study: Vereinfachte Begründung von Lies Kugelgeometrie. I E. A. Weiss: Zusatz zu dieser Abhandlung	» 2.—
Rubner: Beziehung zwischen Nahrungsaufwand und körperlichen Leistungen des Menschen	» 2.—
R. Brauer: Arithmetische und invariantentheoretische Eigenschaften	» 1.—
Fick: Obere Gliedmaßen des Menschen und Gliedmaßen der Menschenaffen	» 2.50
Planck: Über die Begründung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik	» 1.—
Landau: Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante	» 1.—
F. Simon: Thermisch erregte Quantensprünge in festen Körpern	» 1.—
Schur: Zur additiven Zahlentheorie	» 1.—
Einstein und J. Grommer: Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz	» 1—
Schlenk: Über die Bedeutung der Radikale für die organische Chemie	» 1.—
Landau: Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen. Zweite Abhandlung	» 1.—
Einstein: Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhanges von Gravitation und Elektrizität. I Einstein: Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhanges von Gravitation und Elektrizität. II	» 1.—
Haberlandt: Zur Zytologie und Physiologie des weiblichen Gametophyten von *Oenothera*	» 1.—
Schur: Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe	» 2.—
J. v. Neumann: Zur Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen	» 1.—
W. Kolhörster und G. von Salis: Die tägliche Periode der Höhenstrahlung (1 Tafel)	» 1.—
Guthnick: Helligkeit der vier hellen Jupitersatelliten	» 2.—
Nernst und W. Orthmann: Die Verdünnungswärme von Salzen. II	» 1.—
E. Hopf: Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen	» 1.—
Koebe: Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. I	» 2.50
Paschen: Die Lichtanregung durch den metastabilen Zustand der Edelgasatome (1 Tafel)	» 1.—
H. Seifert: Die Symmetrie von Kristallen des Pentaerythrit	» 1.—
R. Brauer u. E. Noether: Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen H. Hasse: Existenz gewisser algebraischer Zahlkörper	» 1.—
Einstein: Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz	» 1.—
v. Ficker: Das meteorologische System von Wilhelm Blasius	» 2.—
W. Cauer: Über die Variabeln eines passiven Vierpols	» 1.—
Hahn: Das Protactinium als radioaktives und als chemisches Element	» 1.—
Nernst: Berechnung der elektrolytischen Dissoziation aus der elektrischen Leitfähigkeit	» 1.—
A. Brauer: Über Sequenzen von Potenzresten	» 1.—
K. Reinhardt: Über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche	» 2.—
L. E. J. Brouwer: Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus	» 1.—
Fick: Bewegungsumfang im Schultergelenk (3 Tafeln)	» 2.—
Penck: Die Ursachen der Eiszeit	» 1.—
G. Pólya: Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül Schur: Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe	» 2.—
Rubner: Über die physiologische Bedeutung wichtiger Bestandteile der Vegetabilien	» 2.—
K. Reinhardt: Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope	» 1.—
Rubner: Die Welternährung in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft	» 2.—
Ludendorff: Abhängigkeit der Form der Sonnenkorona von der Sonnenfleckenhäufigkeit	» 2.—

Die Preise verstehen sich in Reichsmark.